

ロボットの科学技術 (遠隔配信版)

速度制御を理解するための数学準備2

担当：三上貞芳

研究棟607室, s_mikami@fun.ac.jp

授業サイト<http://hope.c.fun.ac.jp/>

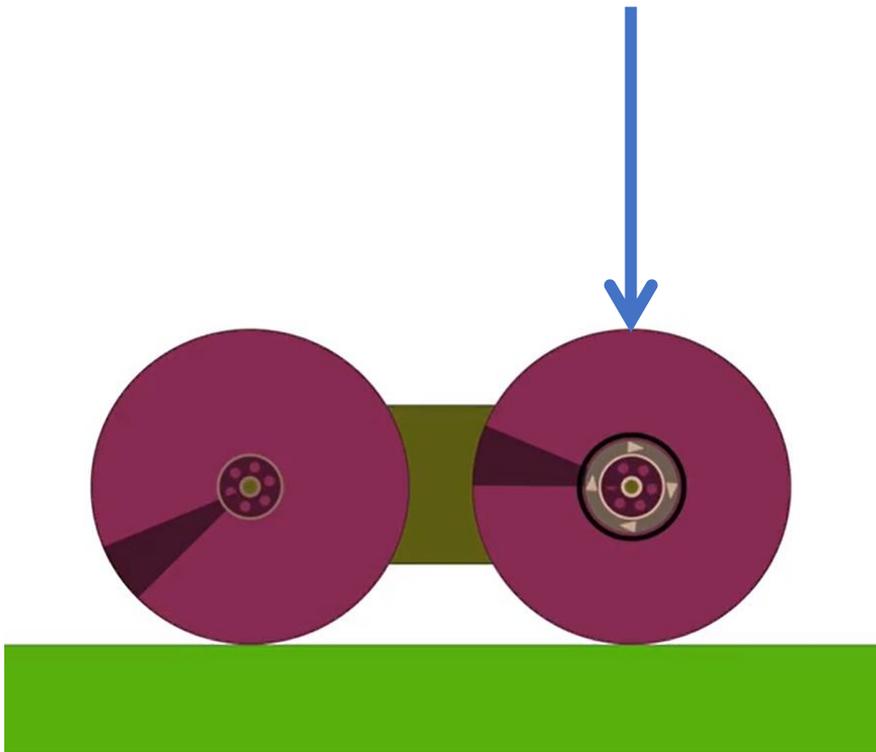
速度制御を理解するための数学準備2/2

マニピュレータ・ヤコビアン

ちょっとややこしいが、3年生以上の学年ではすっきり理解できるはずです

車輪の速度とボディの速度の関係（例）

車輪にモータがついていて、時刻 t で $\theta(t) = t^2$ の角度になる（だんだん早く回る）
ボディは車輪で押されるので、位置は $x(\theta(t)) = 2\theta(t)$ になる（だんだん前に進む）



車輪の回転角とボディの位置の関係

車輪にモータがついていて、時刻 t で $\theta(t) = t^2$ の角度になる（だんだん早く回る）

ボディは車輪で押されるので、位置は $x(\theta(t)) = 2\theta(t)$ になる（だんだん早く進む）

File [Settings] [Play] [Stop] [Help] Algodoo v2.1.0

Box

Position (x) / Time

Clear

X-axis: Time

Y-axis: Position (x)

Position (x) / Time

Show axes

Show legends

Time span: 30.0 s

Smoothing: 0

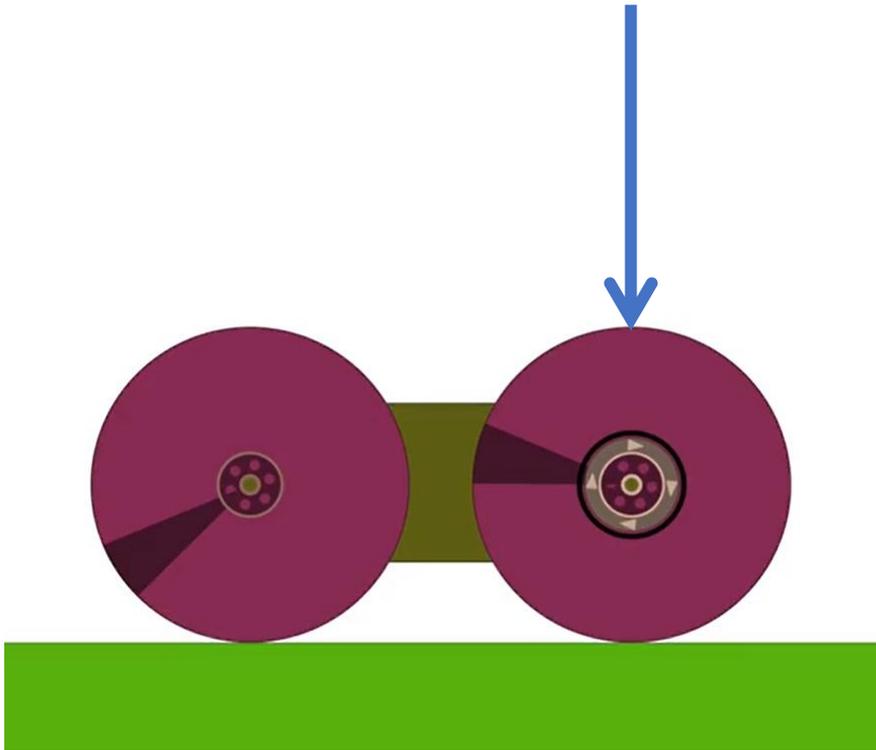
Save as image file

Save as CSV file

1 m

車輪の速度とボディの速度の関係

車輪にモータがついていて、時刻 t で $\theta(t) = t^2$ の角度になる（だんだん早く回る）
ボディは車輪で押されるので、位置は $x(\theta(t)) = 2\theta(t)$ になる（だんだん前に進む）



ボディの速度は？

速度は位置を時間で微分したものの

$$v(t) = \frac{dx(\theta)}{dt}$$

角速度は、角度を時間で微分したものの

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = 2t$$

ここで、

$$x(\theta) = 2\theta$$

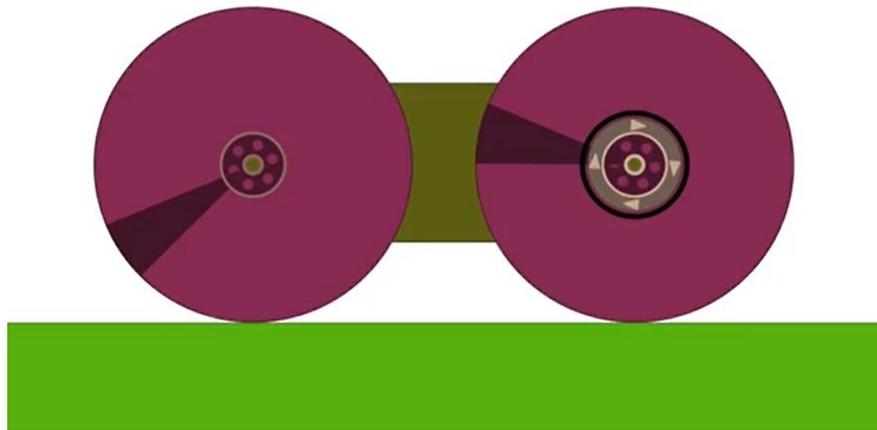
だから、微分すると

$$v(t) = \frac{dx(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{dx(\theta)}{d\theta} \omega(t) = 4t$$

車輪の速度とボディの速度の関係

車輪にモータがついていて、時刻 t で $\theta(t) = t^2$ の角度になる（だんだん早く回る）
ボディは車輪で押されるので、位置は $x(\theta(t)) = 2\theta(t)$ になる（だんだん前に進む）

これが、角度とボディの関係を表すもの
この乗り物の構成（たとえば車輪サイズ）によって変わる



ボディの速度は？

速度は位置を時間で微分したものの

$$v(t) = \frac{dx(\theta)}{dt}$$

角速度は、角度を時間で微分したものの

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = 2t$$

ここで、

$$x(\theta) = 2\theta$$

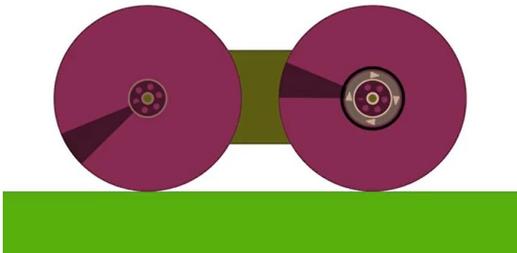
だから、微分すると

$$v(t) = \frac{dx(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{dx(\theta)}{d\theta} \omega(t) = 4t$$

車輪の速度とボディの速度の関係の整理

車輪にモータがついていて、時刻 t で $\theta(t)$ の角度になる

ボディは車輪で押されるので、位置は $x(\theta(t))$ になる



ボディの速度は？

速度は位置を時間で微分したものの

$$v = \frac{dx(\theta)}{dt}$$

角速度は、角度を時間で微分したものの

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

したがって、

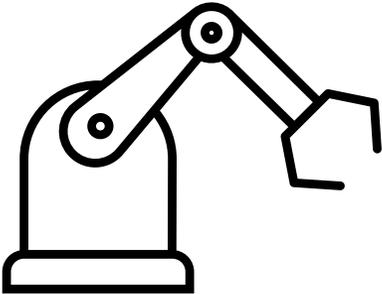
$$v = \frac{dx(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dx(\theta)}{d\theta} \omega$$

この話をベクトルに 拡張

リンクにモータがついていて、
時刻 t で $\theta_1(t), \theta_2(t)$ の角度

ハンドはリンクで動かされるの
で、位置は

$x = f_x(\theta_1, \theta_2), y = f_y(\theta_1, \theta_2)$
になる



ハンドの速度は？

速度は位置を時間で微分したもの

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{df_x(\theta_1, \theta_2)}{dt} \\ \frac{df_y(\theta_1, \theta_2)}{dt} \end{bmatrix}$$

角速度は、角度を時間で微分したもの

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\theta_1}{dt} \\ \frac{d\theta_2}{dt} \end{bmatrix}$$

したがって、

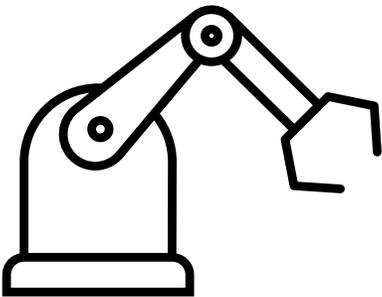
$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \frac{df(\theta)}{d\theta} \begin{bmatrix} \frac{d\theta_1}{dt} \\ \frac{d\theta_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta_1} f_x & \frac{\partial}{\partial \theta_2} f_x \\ \frac{\partial}{\partial \theta_1} f_y & \frac{\partial}{\partial \theta_2} f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

この話をベクトルに 拡張

リンクにモータがついていて、
時刻 t で $\theta_1(t), \theta_2(t)$ の角度

ハンドはリンクで動かされるの
で、位置は

$x = f_x(\theta_1, \theta_2), y = f_y(\theta_1, \theta_2)$
になる



ハンドの速度は？

速度は位置を時間で微分したもの

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{df_x(\theta_1, \theta_2)}{dt} \\ \frac{df_y(\theta_1, \theta_2)}{dt} \end{bmatrix}$$

これが、角度とボディの関係を表すもので、
ロボットの構成（たとえばリンクの付き方や
長さ）によって変わる

マニピュレータ・ヤコビアンと呼ぶ

したがって、

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \frac{df(\theta)}{d\theta} \begin{bmatrix} \frac{d\theta_1}{dt} \\ \frac{d\theta_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta_1} f_x & \frac{\partial}{\partial \theta_2} f_x \\ \frac{\partial}{\partial \theta_1} f_y & \frac{\partial}{\partial \theta_2} f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$